#### Лекция №16

###### Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

На практике чаще встречаются случаи, когда переходы

*Si*  *S j*

могут

происходить не в фиксированные моменты времени

*t*1,*t*2 ,... , а в любой момент

(например, отказ любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени). Эти моменты времени являются случайными и указать их невозможно. Для описания таких процессов в ряде случаев можно с успехом применить схему МЦДС и непрерывным временем, которую для кратности называется *непрерывной цепью Маркова* (НЦМ).

Как выразить вероятности состояний для такого процесса?

Пусть

*S* : *S*1, *S*2 ,. , *Sn* . Переходы

*Si*  *S j*

могут быть в любой момент

времени. Граф состояний системы на рисунке:

.



*S*1

*S*2

*S*3

.

.

.

.

. . . . . .



*Si*

*S j*

.



*Sn*

.

.

.

Обозначим:

*pi* *t*  -вероятность того, что в момент *t* система *S* будет находиться в

состоянии

*Si* *i*  1,2,..., *n* . Очевидно, что для любого момента *t* справедливо

 *pi* *t*   1 (3.1)

*n*

*i*1

Ставится задача: Определить для любого *t* вероятности состояний

*p*1 *t* , *p*2 *t* ,..., *pn* *t* .

Для решения задачи необходимо знать *характеристики процесса, аналогичные переходным вероятностям для дискретной марковской цепи*.

В случае марковского процесса с непрерывным временем невозможно

задавать определённые, отличные от нуля, переходные вероятности

*Pij* ;

вероятность перехода системы из

*Si*  *S j*

точно в момент *t* будет равна нулю

(также как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной вершины).

Вместо переходных вероятностей

*Pij*

мы введём в рассмотрение

*плотности вероятностей перехода*

*ij* .

Пусть *S* в момент *t* находится в состояния *Si* . Рассмотрим

элементарный промежуток времени *t* , примыкающий к моменту *t* .

*Si*

–*t* –

*t*

*t t*  *t*

Назовем *плотностью вероятностей перехода*

*ij*

предел отношения

вероятности перехода системы за время *t*

из *Si*

в *S j*

к длине промежутка

*t* :

  lim *Pij* *t*  , (3.2)

*ij* *t* 0 *t*

где

*Pij* *t* 

* вероятность того, что система, находившаяся в момент *t* в

состоянии

только для

*Si* , за время *t*

*j*  *i*!).

перейдет из него в состояние *S j*

( *ij*

определяется

Из (3.2) следует, что при малом *t*

вероятность перехода

*Pij* *t*  (с

точностью до бесконечно малых высших порядков) равна

*Pij* *t*   *ij* *t*

*ij*  *t* ,т.е.

Если все

*ij*

не зависят от *t* (т.е. от того, в какой момент начинается

элементарный участок *t* ), марковский процесс называется однородным;

если они представляют собой функции времени

*ij* *t* , процесс называется

неоднородным. Следовательно, различают *однородную непрерывную марковскую цепь* и *неоднородную непрерывную марковскую цепь*.

Предположим, что нам известны плотности вероятностей переходов

*ij*

для всех пар

*Si*  *S j* . Проставим эти плотности против каждой стрелки

*i*  *j*

на ГС. Такой граф называется размеченным графом состояний для рассматриваемого случая.

Оказывается, зная РГС, можно определить вероятности состояний

*p*1 *t* , *p*2 *t* ,..., *pn* *t* 

как функции времени. А именно эти вероятности (функции)

удовлетворяют определённого вида дифференциальным уравнениям, так

*называемым уравнениям Колмогорова*.

Решая эти уравнения мы получаем искомые вероятности

*p*1 *t* , *p*2 *t* ,..., *pn* *t* .

###### Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний непрерывной цепи Маркова

Рассмотрим схему вывода уравнений Колмогорова на примере.

###### Пример.

Пусть

*S* : *S*1 , *S*2 , *S*3 , *S*4

и задан РГС (рис).

Поставим задачу:

Найти, например,

*p*1*t* , т.е. вероятность того, что в момент *t* система

будет находиться в состоянии

*S*1 .

*S*1

12

*S*2

23

31

*S*3

24

42

*S*4

34

Решение: Придадим *t* малое приращение *t* , и мы найдём вероятность того,

что в момент

*t*  *t*

*S* будет в состоянии

*S*1 , т.е. произойдет событие

*St* *t* . Это

событие

1

*t* *t*

1

*S*

может произойти (по РГС) двумя способами:

* в момент *t* система уже была в состояния;

*S*1 , а за время *t*

не вышла из этого

* в момент *t* система была в

*S*3 , а за время *t*

перешла в

*S*1 .

Вероятность первого способа есть произведение вероятности

*P*1*t* на

условную вероятность того, что будучи в

*S*1 система за время *t*

*не перешла*

в *S*2 1 12*t*.

Аналогично, вероятность второго способа равна

*p*3 *t*  31*t*

( 31*t* –

условная вероятность перехода за *t*

Следовательно:

в *S*1 из

*S*3 ).

*p*1*t*  *t*   *p*1*t* 1 12*t*  *p*3 *t*  31*t* .

Раскрыв скобки в правой части, перенеся

*p*1 *t*

в левую часть и разделив обе

части равенства на

*t* , получим:

*p*1*t*  *t*  *p*1*t*   

*p* *t*  

*p* *t* 

*t* 12 1

31 3

lim *p*1*t*  *t*  *p*1*t*   

*p* *t*  

*p* *t* ,

то есть

*t* 0

*t*

*dp*1*t*   

12

*p* *t*  

1

*p* *t* 

31 3

(4.1)

*dt* 12 1

31 3

Таким образом, выведено дифференциальное уравнение, которому

должна удовлетворять функция

*p*1 *t* .

Аналогичные уравнения можно получать и для

*p*2 *t*, *p*3 *t*, *p*4 *t*.

Рассмотрим, например, второе состояние *S*2

и найдём

*p*2 *t*  *t*  –

вероятность того, что в момент *t*  *t* 

система *S* будет находиться в

состоянии

*S*2 .

*Событие*

*t* *t*

2

*S*

может произойти следующими способами:

* в момент *t* система была в

*S*2 , а за время *t*

не перешла из него ни в

*S*3 , ни в *S*4 .

* в момент *t* система была в
* в момент *t* система была в

*S*1 , а за время *t*

*S*4 , а за время *t*

перешла в состояние перешла в состояние

*S*2 .

*S*2 .

Найдём вероятности этих способов:

Первый способ: Второй способ: Третий способ:

Следовательно:

*p*2 *t*1 23*t*  24*t*.

*p*1*t*12*t* .

*p*4 *t* 42*t* .

*p*2 *t*  *t*  *p*2 *t*1 23*t*  24*t* *p*1*t*12*t*  *p*4 *t*42*t*

Перенеся

*p*2 *t*  в левую часть и деля обе части на

*t* , получим

*p*2 *t*  *t*   *p*2 *t*   

*p* *t*   

*p* *t*   

*p* *t*   

*p* *t* 

*t* 23 2

24 2

12 1

42 4

lim

*p*2 *t*  *t*   *p*2 *t*   

*p* *t*   

*p* *t*   

*p* *t*   

*p* *t* 

или

*t* 0 *t*

23 2

24 2

12 1

42 4

*dp*2 *t*   

*p* *t*   

*p* *t*   

*p* *t*   

*p* *t* 

(4.2)

*dt* 23 2

24 2

12 1

42 4

Аналогичным способом можно получить уравнения и для

*p*3 *t*  и

*p*4 *t* .

Отбросив для простоты аргумент *t y* функций окончательно выписать систему:

*p*1 (*t*)  *p*4 (*t*) , можно

*dp*1   *p*   *p* 

*dt*

*dp*2

*dt*

*dp*

12 1

 23 *p*2

31 3

 24 *p*2

 12 *p*1





 42 *p*4 





(4.3)

3  31 *p*3 *dt*

*dp*

 34 *p*3

 23 *p*2 





4  42 *p*4  24 *p*2  34 *p*3 

*dt* 

Эти уравнения для вероятности состояний и называются *уравнениями Колмогорова*.

Интегрирование системы уравнений (4.3) и даст нам искомые вероятности состояний как функции времени.

Начальные условия берутся для (4.3) в зависимости от того, каково было начальное состояние системы *S* .

Например, если при

начальные условия будут:

*t*  0

система *S* находилась в состоянии

*S*1 , то

при *t*  *t*0 *p*1 1, *p*2  *p*3  *p*4  0.

Если вспомнить, что

*p*1  *p*2  *p*3  *p*4  1

для всех *t* , то всех четырех

уравнений можно было бы и не писать и любую из вероятностей

*p*1, *p*2 , *p*3 , *p*4

можно выразить через три остальные. Например

*p*4  1 *p*1  *p*2  *p*3  и

подставить в остальные уравнения, и специального уравнения для системе (4.3) можно не выписывать.

###### Правило образования структуры уравнений в (4.3):

*p*4 в

*В левой части каждого уравнения стоят производные вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «-»; если в состояние – знак «+». Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.*

Это правило составления дифференциальных уравнений для вероятностей состояний является общим и справедливо для любой непрерывной марковской цепи; с его помощью можно совершению механически, без всяких рассуждений, записывать дифференциальные уравнения для вероятностей состояний непосредственно по размеченному графу состояний.

###### Контрольные вопросы

1. Какой случайной процесс называется непрерывной цепью Маркова?
2. Как вводится в рассмотрение понятие «плотность вероятностей

перехода

схему.

*ij* » при анализе непрерывной цепи Маркова. Приведите

1. По какому основному общему правилу составляются дифференциальные уравнения Колмогорова для определения вероятностей состояния непрерывной марковской цепи?